MA2 – řešení domácího cvičení – – lineární diferenciální rovnice 2. řádu

1. Obecné řešení homogenní rovnice:

a) $y'' + 3y' - 4y = 0$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, $x \in R$,
tj. hledáme „jen" λ tak, aby

$(e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' - 4e^{\lambda x} = 0$ – a odtud

$\left((e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x},\ (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ e^{\lambda x} \neq 0 \right)$

dostaneme tzv. charakteristickou rovnici pro danou diferenciální rovnici:

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, jejíž kořeny jsou

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4$

a tedy fundamentální systém řešení (a) je $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{-4x}$ a

obecné řešení dané rovnice je

$$y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x},\quad x \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ (a už řešíme „rychleji")

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ ... charakteristická rovnice b)

tj. $(\lambda + 3)^2 = 0$ – ch. r. má jeden (dvojnásobný) kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

fundamentální systém je (dle „teorie")

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = x e^{-3x}$$

a obecné řešení dané rovnice b) je

$$y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}, \quad x \in R, \; C_1, C_2 \in R$$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ charakteristická rovnice

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 13 = -36$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

tj. rovnice má komplexní kořeny

tj. $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$, pak fundamentální systém je

$y_1(x) = e^{2x}\cos(3x)$, $y_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$ a pak

$$y_H(x) = e^{2x}\left(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right), \quad x \in R, \; C_1, C_2 \in R$$

2. Řešení počáteční úlohy (pro homogenní rovnice)

a) $y'' - y' - 2y = 0 \;;\; y(0)=1,\; y'(0)=-1$

(i) obecné řešení:

ch.r.: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

$(= (\lambda - 2)(\lambda + 1))$

tedy $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \; x \in R, \; c_1, c_2 \in R$

(ii) řešení počáteční úlohy:

$y(0) = 1 : \quad c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = -1 : \quad -c_1 + 2c_2 = -1$

a tedy $c_2 = 0$ a $c_1 = 1$

tj. $y_{poč}(x) = e^{-x}, \; x \in R$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$

(i) obecné řešení:

ch.r.: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, $D = 4-20 = -16$,

a tedy $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{16}}{2}$, tj. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

fundamentální systém:

$y_1(x) = e^x \cos(2x)$, $y_2(x) = e^x \sin(2x)$

a obecné řešení

$$y_H(x) = e^x\left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right)$$

(ii) řešení počáteční úlohy:

„příprava": $y_H'(x) = e^x\left(c_1\cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right) +$
$+ e^x\left(-2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x)\right)$

$y(0) = 1$: $c_1 = 1$
$y'(0) = 2$: $c_1 + 2c_2 = 2$,

a odtud $c_2 = \frac{1}{2}$, tedy

$$y_{poč}(x) = e^x\left(\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right), \quad x \in R$$

3) $y'' - y' - 2y = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
(variace konstant)

(i) řešení homogenní rovnice (obecné) viz příklad 2a)
$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) variace konstant – pro "nalezení" řešení s pravou stranou $f(x)$

opakování „obecného" návodu (viz poznámky k přednášce 2. 3. 2020)

řešení hledáme ve tvaru ($c_1(x), c_2(x)$ – hledané fce)
$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

a dostáváme pro funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ soustavu rovnic

(1) $c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$

(2) $c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x)$,

která má jediné řešení pro každé $x \in \mathbb{R}$ (zde), neboť
$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Připomenutí:

rovnici (1) dostaneme při výpočtu $y'(x)$ a rovnici (2) soustavy po dosazení do dané diferenciální rovnice $y''+py'+qy=f(x)$

V našem příkladu: $y_1(x)=e^{-x},\ y_2(x)=e^{2x}$

a) $f(x)=-4x$:

$$c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{2x}=0 \quad \ldots (1)$$

$$-c_1'(x)e^{-x}+2c_2'(x)e^{2x}=-4x \quad \ldots (2)$$

a odtud: $c_2'(x)=-\frac{4}{3}xe^{-2x},\quad c_1'(x)=\frac{4}{3}xe^{x}$

a $c_1(x), c_2(x)$ „získáme" integrací (zde jen určíme $y_p(x)$)
(partikulární řešení)

$$c_1(x)=\frac{4}{3}\int xe^{x}dx=\frac{4}{3}\left(xe^{x}-e^{x}\right)\quad (+c_1)$$

$$c_2(x)=-\frac{4}{3}\int xe^{-2x}dx=-\frac{4}{3}\left(x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{3}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)\quad (+c_2)$$

a tedy: partikulární řešení je

$$y_p(x)=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{2x}=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right),$$

$$y_p(x)=2x-1,\quad x\in R$$

A obecné řešení rovnice s pravou stranou $f(x) = -4x$ je

$$\underline{y_{ob} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + 2x - 1 \quad , x \in R,\ c_1, c_2 \in R}$$

<u>Řešení počáteční úlohy</u>

$y(0) = 1$: $\quad c_1 + c_2 - 1 = 1$, tj. $c_1 + c_2 = 2$

$y'(0) = 1$: $\quad -c_1 + 2c_2 + 2 = 1$ $\quad -c_1 + 2c_2 = -1$

a odtud $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{5}{3}$

tedy $\underline{y_{poč}(x) = \frac{5}{3} e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} + 2x - 1 \quad , x \in R}$

<u>Ještě si ukážeme, jak je jednodušší odhad $y_p(x)$:</u>

<u>Dle návodu pro odhad:</u> $\quad y_p(x) = Ax + B \quad$ ($\lambda = 0$ – není kořenem ch. r.)

pak $y_p' = A$ a „hledáme" A, B tak, aby

$$y'' - y' - 2y = -4x,$$

tedy $\quad -A - 2(Ax + B) = -4x$,

tedy u x: $\quad 2A = 4 \Rightarrow A = 2$

u x^0: $\quad -A - 2B = 0 \Rightarrow -2B = 2$, tj. $B = -1$

a $\underline{y_p(x) = 2x - 1}$ $\quad$!

b) $f(x)=e^{2x}$: $c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{2x}=0$

$$-c_1'(x)e^{-x}+2c_2'(x)e^{2x}=e^{2x}$$

a odtud: $3c_2'(x)e^{2x}=e^{2x} \Rightarrow c_2'(x)=\frac{1}{3}$

$$c_1'(x)=-c_2'(x)e^{2x}.e^{x} \Rightarrow c_1'(x)=-\frac{1}{3}e^{3x}$$

a integrací: $c_1(x)=-\frac{1}{9}e^{3x}+c_1$, $c_1\in R$

$$c_2(x)=\frac{1}{3}x+c_2 \quad , c_2\in R$$

(zde „unicérne" obecné řešení), tedy

$$y_{oo}(x)=\left(-\frac{1}{9}e^{3x}+c_1\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{3}x+c_2\right)e^{2x}$$

a po úpravě

$$\underline{y_{oo}(x)=c_1e^{-x}+\tilde{c}_2e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{2x}, \quad x\in R, c_1,\tilde{c}_2\in R}$$

$\left(\tilde{c}_2=c_2-\frac{1}{9}\right.$, což jsou opět „všechna" reálná čísla)

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

$y(0)=1$: $c_1+\tilde{c}_2=1$, $c_1+\tilde{c}_2=1$

$y'(0)=1$: $-c_1+2\tilde{c}_2+\frac{1}{3}=1$, $-c_1+2\tilde{c}_2=\frac{2}{3}$,

a odtud $\tilde{c}_2=\frac{5}{9}$, $c_1=\frac{4}{9}$ a

$$\underline{y_{poč}=\frac{4}{9}e^{-x}+\frac{5}{9}e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{2x}, \quad x\in R}$$

A zkusme ještě najít partikulární řešení „odhadem":

$f(x) = e^{2x}$, pak v návodu na odhad (viz 4.3.) je $\lambda = 2$ a tedy je toto λ jednonásobný kořen charakteristické rovnice ($y_2(x) = e^{2x}$ je člen fundamentálního systému)

a tedy odhad partikulárního řešení je

$$y_p(x) = A \cdot x\, e^{2x}$$

Potom:

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$

$$y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4xAe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

a dosadíme-li do rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$,

dostaneme:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

a tedy (vykrátíme e^{2x})

$$3A + x\,(\underbrace{4A - 2A - 2A}_{=0}) = 1$$

a odtud $A = \frac{1}{3}$, a tedy

$$y_p(x) = \frac{1}{3} x e^{2x} \quad (\text{! opět})$$

a odhady partikulárního řešení (příklad 4)

Návod (připomenutí): mějme rovnici

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in R$$

Pak, je-li $f(x) = e^{ax}(r(x)\cos(bx) + s(x)\sin(bx))$,

$(a, b \in R,\ r(x), s(x)$ polynomy$)$

pak $y_p(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx))$

kde $S(x), R(x)$ jsou polynomy stejné $= \max.(\text{st}\, r(x), \text{st}\,(s(x)))$ a $\Lambda = a+ib$ je k-násobný kořen charakteristické rovnice ($k=0,1,2$; $k=0$ – Λ <u>není</u> kořen ch. r.)

a) $y'' - y' - 2y = f(x)$, $\quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$

pro $f(x) = -4x$, $f(x) = e^{2x}$ – už uděláno, dále navrhneme odhad řešení (výpočet „později")

(i) $f(x) = 3e^x$; $\Lambda = 1 \Rightarrow k = 0$ a

$y_p(x) = Ae^x$, $x \in R$

(ii) $f(x) = xe^{-2x}$; $\Lambda = -2$ není kořen, tj. $k=0$,

$r(x) = x \Rightarrow$ st $R(x) = 1$

$y_p(x) = (Ax+B)e^{-2x}$, $x \in R$

(iii) $f(x) = \cos 2x$: $\Lambda = 2i$, není kořen ch. r. $\Rightarrow$
$\Rightarrow k = 0$; $r(x) = 1 \Rightarrow$ st. $r(x) = 1$
a st $S(x) =$ st $R(x) = 0$, tedy

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

(a po „dosazení" srovnáváme koeficienty u fcí $\cos 2x$ a $\sin 2x$)

b) $y'' - y' = f(x)$: ch. r. : $\lambda^2 - \lambda = 0$, tj. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

(i) $f(x) = 8\sin 2x$; $\Lambda = 2i \Rightarrow k = 0$

$y_p(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$ (st $R(x) =$ st $S(x) = 0$)

(ii) $f(x) = e^x \sin x$: $\Lambda = 1 + i \Rightarrow k = 0$
(opět st $R(x) =$ st $S(x) = 0$)

$$y_p(x) = e^x (A\cos x + B\sin x)$$

c) $y'' - 2y' + 5y = f(x)$: ch. r. $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

(i) $f(x) = 2x \rightarrow y_p(x) = (Ax + B)$

(ii) $f(x) = e^{-x} \cos x \rightarrow y_p(x) = e^{-x} (A\cos x + B\sin x)$
$\Lambda = -1 + i \Rightarrow k = 0$

(iii) $f(x) = e^x \sin 2x \rightarrow y_p(x) = e^x \cdot x\,(A\sin 2x + B\cos 2x)$
zde $\Lambda = 1 + 2i$ je kořen ch. r. $\Rightarrow k = 1$